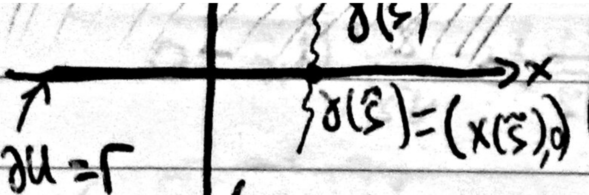
21/10/15



[Θέλω ακόμα να υπολογίσω την $z(s)$ (κατά μήκος της γ) αφού κατά μήκος της γ θα μεταφέρεται η "πληροφορία" $u(x,0)$ από το σύνορο Γ του u σε οποιοδήποτε σημείο του u.]

2) Από το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = 1, & x(0) = x_0 \\ \dot{y}(s) = 1, & y(0) = y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(s) = x_0 + s \\ y(s) = y_0 + s \end{cases}$$

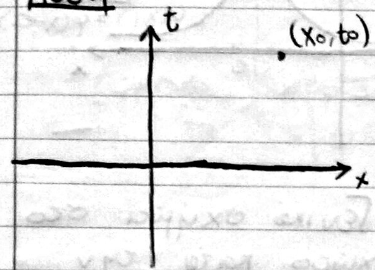
Συνεπώς, αφού απαιτούμε $y(\tilde{s}) = 0$, έχουμε $\tilde{s} = -y_0$. Άρα, $x(\tilde{s}) = x_0 + \tilde{s} = x_0 - y_0$

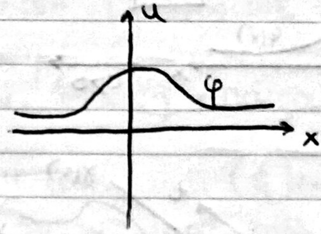
Άρα, $u(x_0, y_0) = z(\tilde{s}) = f(x(\tilde{s})) = f(x_0 - y_0)$, $\forall (x_0, y_0) \in u$.

Παράδειγμα (εξίσωση μεταφοράς)

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0, & (x,t) \in U, \quad U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, t>0\} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} = \Gamma = \partial U, \quad \varphi \in C^1(\mathbb{R}), \quad c>0 \end{cases} \quad (*)$$

Λύση





Μέθοδος Χαρακτηριστικών

Θεωρώ $\gamma(s) = (x(s), \gamma(s))$, με $\gamma(0) = (x_0, t_0) \in U$.

όπου γ η χαρακτηριστική καμπύλη

και $z(s) = u(\gamma(s)) \Longrightarrow \dot{z}(s) = \nabla u(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = u_x \underbrace{\dot{x}(s)}_{=c} + u_t \underbrace{\dot{t}(s)}_{=1} = 0$

Απαίτηση $\rightarrow$

$\forall s \in \mathbb{R}, \gamma(s) \in U$.

$x(0)=0, \ y(0)=0$

$\Rightarrow z(s) = z(0) = u(x_0, t_0)$

Η καμπύλη $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ είναι η $\gamma(s) = (x_0 + cs, t_0 + s)$

και τέμνει τον άξονα των x (χώρος) στον χρόνο $s = -t_0$

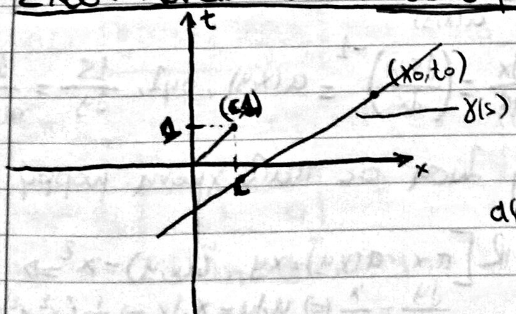
στο σημείο $(x_0 - ct_0, 0)$

$u(x_0, t_0) = z(-t_0) = u(x_0 - ct_0, 0) = \varphi(x_0 - ct_0)$

Άρα, η εξίσωση μεταφοράς (*) έχει ως (μοναδική)

λύση $u(x,t) = \varphi(x - ct)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$

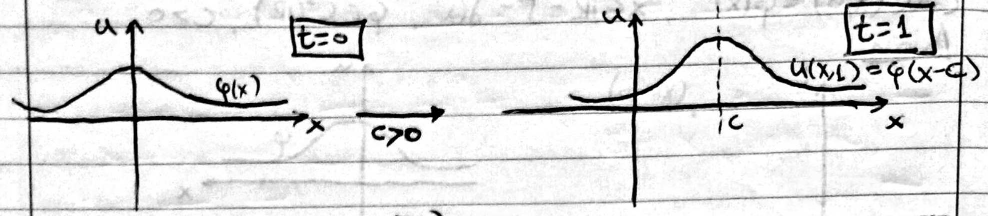
Σχεδιάζοντας τα αποτελέσματα

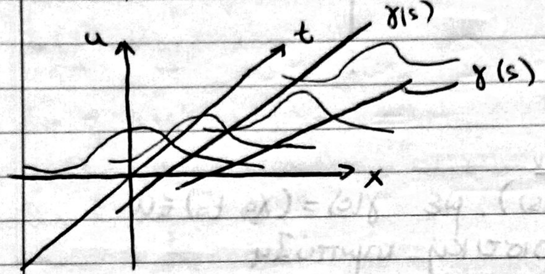


Χαρακτηριστική καμπύλη είναι $\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$, πάνω στην οποία η τιμή της u δεν μεταβάλλεται

αφού $z(s) = u(\gamma(s)) = z(0) = u(x_0, t_0)$, $\forall s \in \mathbb{R}$
$\gamma(s) \subset \bar{U}$

Αφού $\underset{\text{χώρος}}{x},\ \underset{\text{χρόνος}}{t}$: $u(x,t) = \varphi(x-ct) \Rightarrow u(ct,t) = \varphi(0) \xRightarrow{t=1} u(c,1) = \varphi(0)$





Γενικό σχήμα στο χώρο κατά την διάρκεια του t.

Γραμμικές εξισώσεις 1ης τάξης

$U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό (και συνεκτικό) $a, b, c, d \in C^1(U)$

γενική γραμμική εξίσωση (σε δυο μεταβλητές) πρώτης τάξης:

(1) $a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) = d(x,y), \forall (x,y) \in U$,

με $(a(x,y), b(x,y)) \neq (0,0)$, $\forall (x,y) \in U$.

Πρώτος τρόπος επίλυσης (αλλαγή συντεταγμένων)

Θεωρούμε τις εξισώσεις των χαρακτηριστικών (θα το πούμε μετά)

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = a(x(s), y(s)) \\ \dot{y}(s) = b(x(s), y(s)) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

[Απόδειξη: $\frac{dx}{ds} = \left(\frac{ds(x)}{dx}\right)^{-1} = a(x,y)$, δηλ. $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{a(x,y)}$]

Η $\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$ έχει γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή

$\xi(x, y(x)) = \tilde{c}$, $\tilde{c}$ σταθερά $\in \mathbb{R}$ [π.χ. $a(x,y) = xy$, $b(x,y) = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y\,dy = x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = c$]

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ [οι παλιές είναι (x,y)] ώστε με αυτές τις συντεταγμένες η ① να γίνει μια ΣΔΕ. Θα πρέπει όμως να μπορούμε τοπικά σε κάθε (x,y) να μπορούμε να αντιστρέψουμε τα συστήματα συντεταγμένων. Δηλαδή απαιτούμε να ισχύει $\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ [$\Rightarrow$ η απεικόνιση $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{pmatrix}$ αντιστρέφεται σε κάθε σημείο (x,y)]

Ορίζουμε $u(x,y) = u\begin{pmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \tilde{u}(\xi,\eta)$ [$= \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y))$]

$\Rightarrow \begin{cases} u_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x \\ u_y = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_\xi \end{cases}$ $\Rightarrow$ Η ① ισοδυναμεί με την $a(\tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x) + b(\tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y) + c\tilde{u} = d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a\xi_x + b\xi_y)\tilde{u}_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)\tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = d$ ②

Έστω, τώρα το $(x,y) \in U$ βρίσκεται στην καμπύλη στάθμης $\xi(x,y) = c$ [η οποία είναι η λύση της $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$]

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\xi(x, y(x)) = \xi_x + \xi_y \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=\frac{b}{a}} = 0 \Rightarrow a\xi_x + b\xi_y = 0$

Συνεπώς ② $\Rightarrow (a\eta_x + b\eta_y)\tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = d$ ③

[π.χ. $a(x,y) = xy$, $b(x,y) = x^2$, $c(x,y) = -y$, $d(x,y) = xy \Rightarrow$ είδαμε ④ ότι $\boxed{\xi(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2}}$ και εδώ η ③ γίνεται. $(xy\eta_x + x^2\eta_y)\tilde{u}_\eta - y\tilde{u} = xy$

Επιλέγουμε αυθαίρετα (educated guess) $\boxed{\eta(x,y) = x}$

$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = y > 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) = U_1$

④ $\Rightarrow xy\tilde{u}_\eta - y\tilde{u} = xy \Leftrightarrow x\tilde{u}_\eta - \tilde{u} = x \Leftrightarrow \eta\tilde{u}_\eta - \tilde{u} = \eta$ ⑤

Θέλουμε να λύσουμε την $y\tilde{u}_y - \tilde{u} = y$
[πολλαπλασιαστές Euler (ολοκληρωτικοί συντελεστές)]
για τη λύση της $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z}{x} \iff \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = 1$

$$\iff \underbrace{\left(\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z\right)\frac{1}{x}}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right)} = \frac{1}{x} \iff \frac{z}{x} = \ln|x| + c \iff z = x\left(\ln|x| + c\right)$$

Άρα, η λύση της (Σ) είναι
$\tilde{u} = y\left(\ln|y| + c(\xi)\right) \Longrightarrow$ Η γενική λύση της (1) είναι

$$u(x,y) = x\left(\ln|x| + f\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)\right), \text{ με } f \in C^1(U_1)$$

ΑΣΚ: για το ίδιο π.χ με $y(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ στο $U_2 = (0,\infty)^2$ και ελέγξτε ότι η νέα λύση είναι της ίδιας μορφής με την προηγούμενη

ΑΣΚ: $u_x + 2u_y + (2x-y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2$ στο μεγαλύτερο ανοιχτό και συνεκτικό $U \subset \mathbb{R}^2$ που γίνεται αν επιλέξουμε $y(x,y) = x$ και $y(x,y) = x + 2y$